

# 貝氏網路在數學領域「數與量」主題測驗之應用

## - 以國小五年級「等值分數」單元為例

蘇文君\*、汪端正\*\*、郭伯臣\*\*\*

台中市西屯國小\*、彰化縣忠孝國小\*\*

國立台中教育大學教育測驗統計研究所\*\*\*

kbc@mail.ntcu.edu.tw\*\*\*

### 摘 要

本文旨在探討以國小五年級「等值分數」單元為例，以「等值分數錯誤類型、子概念」為診斷單位，採用貝氏網路作為分析工具，並嘗試以「子概念間具有上下位關係的貝氏網路架構」進行診斷，看看是否比過去相關研究所採用的分析模式，在辨識子概念與錯誤類型的有無上，能達到更正確的結果，以期提供教師另一種較之過去更精準的測驗分析方法。研究結果如下：

- 一、學童在「等值分數」單元子概念的精熟度介於 53.5%~86.0%之間，有 7 個子概念未達精熟；錯誤類型發生率在 7.78%~64.44%之間，學生最常以「分子和分母差不變」的錯誤概念處理「等值分數」的問題。
- 二、錯誤類型和子概念的辨識率，動態決斷值選取法可以得較好的結果。
- 三、「子概念間具有上下位關係的貝氏網路」，比過去「子概念間沒有上下位關係的貝氏網路」能將錯誤類型、子概念做更正確的分類，平均分類正確率達 87.3% 以上。

關鍵詞：貝氏網路、等值分數、錯誤類型

### 一、前言

貝氏網路是近年來在人工智慧領域應用十分廣泛的判斷工具，許多心理計量的學者，例如：Lee(2003)、Vomlel(2003)等人將此方法應用在教育評量上。貝氏網路提供強而有力的機率推理模式，可結合受試資料與專家的知識判斷，有效預測學生概念的有無，還可推論變數間（子概念、錯誤類型）的關係。在國小數學教學上，學童學習該單元的迷思所在，通常透過個別訪談、原案分析等方式來瞭解，以利進行後續的補救教學，但學童有個別差異，故往往耗時耗力不易實行。

根據莊惠萍、林立敏、郭伯臣(民 94)，以國小五年級學童「立方公尺與體積」數學單元為例，應用貝氏網路診斷學童在該單元之錯誤類型文獻中，如圖 1，研究者是以子概念間無上下位關係的貝氏網路進行學習診斷。雖然以該貝氏網路進行診斷學生錯誤類型及子概念的有無，達到 85% 以上的分類正確率，然而數學領域的知識內容應具有學習順序，若將該單元內子概念間的相互關係視為獨立，實不符合數學知識的學習歷程。

本研究期望藉由「等值分數」單元所建立之「子概念間具上下位之繼承關係的知識結構」為基礎的測驗模式，如圖 2，探究以此模式來進行貝氏網路分析，是否仍如過去之研究分析一樣，能有效診斷出學生錯誤類型及子概念的有無，甚至能將錯誤類型、子概念做更精準的分類。期能提供教師另一種較之過去更精準的測驗分析方法，以幫助教師更有效的進行補救教學與修正教學內容。

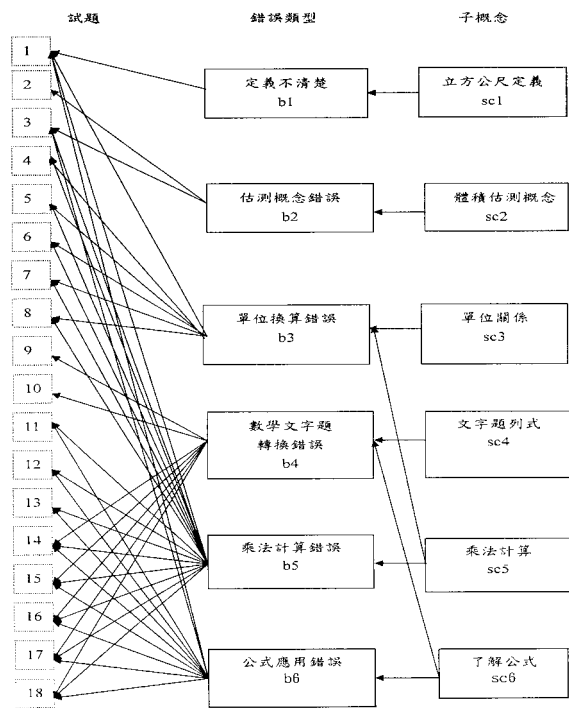


圖 1 「立方公尺與體積」單元錯誤類型貝氏網路

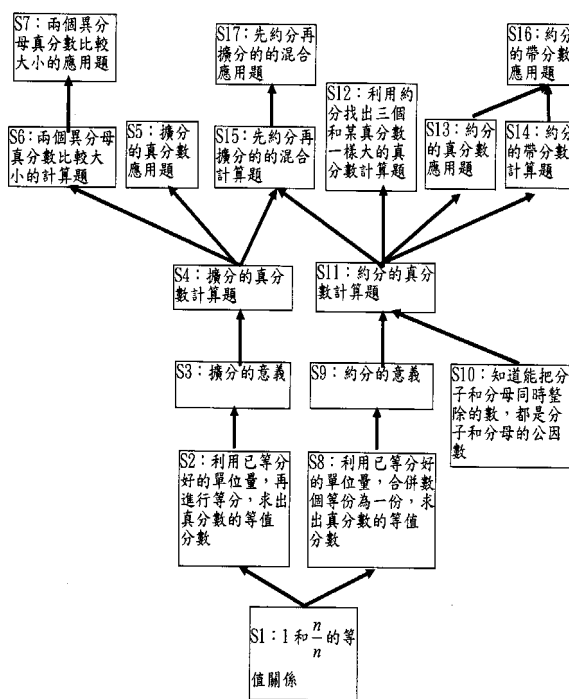


圖 2 「等值分數」單元子概念上下位關係架構圖

## 二、研究目的

本研究欲建立一個以「錯誤類型」為診斷單位，同時分析「子概念」有無的量化分析模式。並比較子概念間有、無上下位關係，對分類正確率的影響。主要目的如下：

- (一) 以「數與量」主題中的「等值分數」單元為例，以「子概念間具上下位繼承關係的知識結構」為基礎，建立貝氏網路架構，並探討此一貝氏網路模式應用在診斷學生子概念及錯誤類型的可行性。
- (二) 探討「子概念間具有上下位關係」的貝氏網路模式，在診斷學生錯誤類型、子概念有無時，是否比「子概念間無上下位關係」的模式有更高的辨識率。

## 三、研究方法

### (一) 研究樣本

施測對象為中部地區國民小學五年級學童，共有 20 個班級，有效樣本 659 名，其中男生 334 名，女生 325 名。

### (二) 研究工具

#### 1. 「等值分數」測驗

本研究自編的「等值分數」單元測驗，是邀請十位現任的國小教師組成研究小組，針對本單元的內容進行分析，並參考相關文獻，針對所欲檢測的錯誤類型與子概念，進行命題。所有試題形式為選擇題，題目與選項皆經過詳細設計以符合辨別錯誤類型的的需求，並要求學童在答案卷上寫出計算過程。本測驗信度為 0.841。

#### 2. Matlab 軟體

本研究使用 Matlab 7.0 版進行先驗分配的計算與主程式的撰寫，配合 Kevin Murphy(2004)所設計的 Bayes Net Toolbox for Matlab 之相關函數，結合成一完整的程式。

### (三) 研究步驟

- 1. 界定等值分數單元重要的學習概念（本研究中稱為子概念）。
- 2. 蒐集等值分數單元迷思概念之相關文獻，並配合原案分析，建立單元之錯誤類型資料。

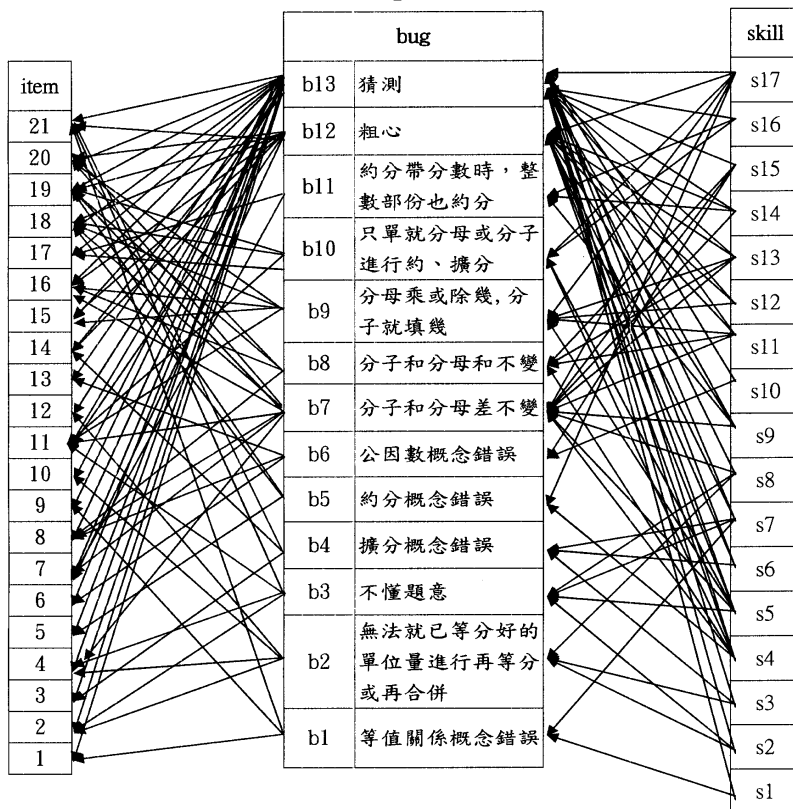


圖 3 等值分數單元錯誤類型貝氏網路架構圖(子概念間之架構如圖 2)

3. 研究小組透過討論，建立等值分數單元貝氏網路架構，其架構如圖 3。
4. 設計施測試卷，試題以選擇題為主，並於施測後建立學童原始作答資料。
5. 分析受測學童在等值分數單元是否具備各個子概念及學童的錯誤類型發生比率。
6. 撰寫等值分數單元之貝氏網路程式。
7. 探討在「各子概念間具有上下位關係時，所建立的貝氏網路架構」下，比較不同分類決斷值之貝氏網路診斷精準度。
8. 執行程式，比較「各子概念間有、無上下位之關係時，所建立的貝氏網路架構」的診斷精準度。

#### 四、 研究結果

##### (一) 等值分數單元子概念的有無情形

表 1 子概念 s1~s17 之通過率

子概念	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9
人數	598	595	580	582	584	566	228	575	575
百分比	86.0%	85.6%	83.5%	83.7%	84.0%	81.4%	32.8%	82.7%	82.7%
子概念	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	
人數	480	581	471	565	533	411	518	372	
百分比	69.1%	83.6%	67.8%	81.3%	76.7%	59.1%	74.5%	53.5%	

從表 1 可以發現：

1. 學童在 s1~s17 的精熟度介於 32.8%~86.0% 之間。
2. s1、s2、s3、s4、s5、s6、s8、s9、s11、s13 這 10 個子概念的學習精熟度(答對率)，皆高於 80%，表示學童具備這 10 個子概念。
3. 「s7 約分的意義」、「s10 知道分子分母的公因數」、「s12 利用約分找出等值分數」、「s14

貝氏網路在數學領域「數與量」主題測驗之應用-以國小五年級「等值分數」單元為例  
約分的帶分數計算題」、「s15 先約分再擴分的計算題」、「s16 約分的帶分數應用題」、「s17 先約分再擴分的混合應用題」這 7 個子概念的學習精熟度(答對率)，僅介於 32.8%~76.7%，顯示學童學習成效欠佳，建議教師於教學時需再做概念澄清、補強的工作。

## (二) 等值分數單元錯誤類型的發生情形

為了探討等值分數單元錯誤類型的發生情形，本研究小組根據圖 3 的單元錯誤類型，分析每一位受試學生的作答原始資料，進行錯誤類型有無之判斷，並統計所有受試學童在本單元的錯誤類型發生情形，如表 2：

表 2 等值分數單元錯誤類型發生情形

代號	錯誤類型	人數	百分比
b1	等值關係概念錯誤	59	8.89%
b2	無法就已等分好的單位量進行再等分或再合併	178	26.94%
b3	不懂題意	130	19.72%
b4	擴分概念錯誤	150	22.78%
b5	約分概念錯誤	77	11.67%
b6	公因數概念錯誤	423	64.17%
b7	分子和分母差不變	425	64.44%
b8	分子和分母和不變	51	7.78%
b9	分母乘或除幾,分子就填幾	267	40.56%
b10	只單就分母或分子進行約、擴分	104	15.83%
b11	約分帶分數時,整數部份也約分	139	21.11%
b12	粗心	383	58.06%
b13	猜測	394	59.72%

從表 2 可以發現：

1. 等值分數單元各錯誤類型的發生率大約在 7.78% 到 64.44% 之間。
2. 錯誤類型發生率最高者為「分子和分母差不變」，發生比率為 64.44%，學生解題錯誤的過程如圖 4，推論原因可能是學童對公因數以及約分、擴分的概念仍不清楚，又將減和除的概念連結，所以用分子和分母同減一數、差不變來處理等值分數問題。
3. 「粗心」錯誤類型之發生率為 58.06%，學生解題錯誤的過程如圖 5，推論原因可能是本題是試卷上的最後一題，學童在較前面的試題中做了比較兩個分數哪個大、哪個多的問題，因此沒看清楚題目，選答「哪個長」的錯誤答案，選擇選項 4。

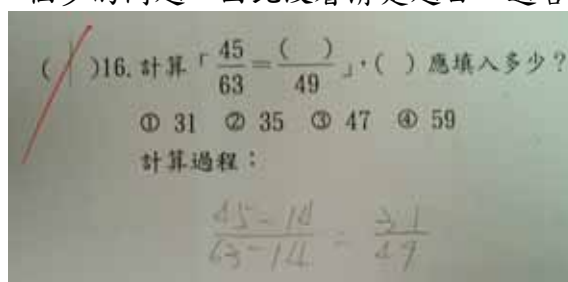


圖 4 「分子和分母差不變」錯誤類型範例

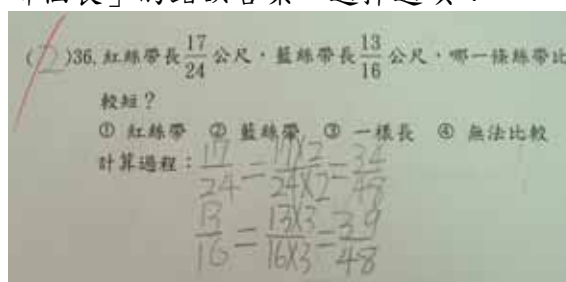


圖 5 「粗心」錯誤類型範例

## (三) 「子概念間具有上下位關係時所建立之貝氏網路架構」應用於診斷國小五年級數學領域「等值分數」單元錯誤類型及子概念的成效

從表 3 可以發現：

1. 就錯誤類型有無之分類而言，每一個錯誤類型之最高辨識率皆達 73% 以上，在分類決斷值固定設為 0.3 時，平均辨識率達 87.35%。
2. 就子概念有無之分類而言，每一個子概念之最高辨識率皆達 76% 以上，在分類決斷值

固定設為 0.6 時，平均辨識率達 84.30%。

3.然而，個別的錯誤類型、子概念的最高分類正確率，並非固定出現在某一分類決斷值上。由表 3 進一步整理後所得之表 4 中可看出：採用動態分類決斷值選取法的辨識率，優於固定分類決斷值選取法的辨識率。錯誤類型的辨識率可由原來的 87.35%再提高到 88.53%，子概念的辨識率可由原來的 84.3%再提高到 86.42%。故本研究使用動態分類決斷值選取法來達到最佳的辨識率。

表 3 「子概念間具有上下位關係架構」的貝氏網路分類決斷值之診斷精準度

分類正確率	分類決斷值								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
b1	96.67%	95.83%	95.28%	94.44%	94.44%	93.61%	93.61%	93.61%	93.33%
b2	93.06%	94.17%	95.28%	95.56%	95.83%	95.00%	92.50%	91.39%	90.00%
b3	84.44%	84.17%	85.83%	86.39%	85.83%	86.67%	86.11%	86.94%	85.56%
b4	90.83%	90.00%	89.44%	88.61%	88.89%	88.89%	87.78%	86.94%	86.11%
b5	96.67%	96.11%	95.83%	96.11%	95.56%	95.28%	94.44%	94.44%	93.89%
b6	95.00%	96.11%	94.44%	92.22%	92.78%	91.94%	90.83%	88.89%	85.56%
b7	64.17%	71.67%	73.06%	70.83%	69.17%	64.17%	59.72%	62.50%	59.17%
b8	88.61%	90.28%	92.22%	92.22%	92.78%	93.06%	93.06%	93.06%	93.06%
b9	73.06%	76.39%	76.94%	77.22%	76.39%	75.83%	74.17%	73.33%	71.94%
b10	83.89%	85.83%	87.78%	87.22%	86.94%	86.39%	86.67%	87.22%	87.50%
b11	86.11%	87.22%	87.22%	88.06%	87.50%	87.78%	87.22%	86.11%	84.44%
b12	81.94%	82.22%	82.78%	82.50%	82.50%	83.06%	83.06%	81.11%	76.39%
b13	75.56%	78.61%	79.44%	81.67%	83.33%	83.61%	83.89%	83.89%	85.56%
平均	85.38%	86.82%	*87.35%	87.16%	87.07%	86.56%	85.62%	85.34%	84.04%
s1	90.56%	90.83%	91.39%	91.67%	91.94%	92.22%	92.78%	94.72%	96.39%
s2	88.61%	88.61%	88.33%	88.33%	88.06%	88.06%	88.89%	89.72%	88.33%
s3	89.44%	89.44%	89.44%	89.44%	89.44%	89.44%	89.72%	89.72%	91.11%
s4	85.28%	85.56%	85.56%	85.56%	85.56%	85.56%	85.56%	85.56%	85.56%
s5	86.11%	86.11%	86.11%	86.11%	86.11%	86.11%	85.83%	85.83%	84.44%
s6	83.89%	84.72%	84.72%	85.00%	86.11%	86.94%	88.61%	88.89%	70.56%
s7	67.50%	84.72%	90.28%	91.94%	91.39%	89.17%	86.11%	76.67%	69.44%
s8	85.00%	85.00%	85.00%	84.72%	85.56%	86.94%	90.28%	92.22%	91.39%
s9	86.94%	86.94%	86.94%	86.94%	86.94%	86.94%	86.94%	86.11%	81.11%
s10	69.17%	69.17%	68.89%	68.89%	67.78%	74.72%	78.61%	79.72%	80.28%
s11	84.72%	84.72%	84.72%	84.72%	84.72%	85.00%	85.28%	85.00%	85.28%
s12	68.61%	68.61%	68.61%	69.44%	71.67%	75.83%	83.89%	84.44%	72.50%
s13	81.67%	81.67%	81.67%	81.67%	81.67%	82.22%	82.22%	82.22%	81.39%
s14	79.17%	82.22%	85.00%	87.78%	89.17%	90.00%	90.28%	88.61%	85.83%
s15	55.83%	56.94%	59.44%	63.61%	71.94%	76.11%	72.78%	67.22%	44.17%
s16	75.00%	76.11%	76.94%	77.50%	80.00%	81.67%	83.61%	85.28%	85.56%
s17	50.56%	56.67%	62.22%	69.72%	75.28%	76.11%	55.28%	51.94%	52.22%
平均	78.12%	79.89%	80.90%	81.94%	83.14%	*84.30%	83.92%	83.17%	79.15%

(\*表示最高的平均正確分類率；灰底部分代表錯誤類型及子概念在不同決斷值下的最高分類正確率)

表 4 錯誤類型與子概念之固定與動態分類決斷值比較表

	決斷值													平均正確分類率				
決斷值固定選取	0.3													87.35%				
錯誤類型	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10	b11	b12	b13	88.53%				
決斷值動態選取	0.1	0.5	0.8	0.1	0.1	0.2	0.3	0.9	0.4	0.3	0.4	0.7	0.9					
決斷值固定選取	0.6													84.30%				
子概念	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	86.42%
決斷值動態選取	0.9	0.8	0.9	0.6	0.6	0.8	0.4	0.8	0.7	0.9	0.7	0.8	0.8	0.7	0.6	0.9	0.6	

表 5 子概念間有、無上下位關係時之分類正確率比較表

錯誤類型	概念間上下位關係		子概念	概念間上下位關係	
	有	無		有	無
b1	96.67%	93.33%	s1	96.39%	92.22%
b2	95.83%	94.72%	s2	89.72%	86.94%
b3	86.94%	85.00%	s3	91.11%	90.28%
b4	90.83%	89.44%	s4	85.56%	85.28%
b5	96.67%	95.56%	s5	86.11%	85.83%
b6	96.11%	93.89%	s6	88.89%	84.44%
b7	73.06%	70.28%	s7	91.94%	89.44%
b8	93.06%	92.50%	s8	92.22%	89.44%
b9	77.22%	77.22%	s9	86.94%	86.94%
b10	87.78%	85.28%	s10	80.28%	78.89%
b11	88.06%	88.33%	s11	85.28%	85.00%
b12	83.06%	83.06%	s12	84.44%	81.94%
b13	85.56%	81.39%	s13	82.22%	81.94%
			s14	90.28%	91.67%
			s15	76.11%	75.83%
			s16	85.56%	78.61%
			s17	76.11%	56.11%
平均	<b>88.53%</b>	86.92%	平均	<b>86.42%</b>	83.58%

灰底部分表示具有較高辨識率的貝氏網路模式下的錯誤類型及子概念。

從表 5 可以發現：

1. 不論「子概念間是否具有上下位關係」，錯誤類型的平均辨識率均達 86% 以上，子概念的平均辨識率均達 83% 以上，顯示兩種貝氏網路架構均有不錯的分類正確水準。
2. 表 5 顯示經改良後之貝氏網路模式，即採用「子概念間具有上下位關係之貝氏網路架構」診斷學生錯誤類型、子概念有較佳的精準度，平均分類正確率達 87.3% 以上。
3. 改良後的貝氏網路模式，除了 1 種錯誤類型和 1 項子概念的分類正確率微幅下降外，整體而言，錯誤類型的平均辨識率上升 1.61%，子概念的平均辨識率上升 2.84%，顯示經改良後之貝氏網路模式，較過去的研究結果而言，確能將錯誤類型、子概念做更精準的分類。

## 五、結論與建議

- (一)學生最常以「分子和分母差不變」的錯誤概念解答「等值分數」的問題，建議教師進行補救教學時，需針對公因數、約分以及擴分的概念進行補強。
- (二)錯誤類型和子概念的最高分類正確率，並不會出現在某一固定分類決斷值上，動態分類決斷值選取法可得到較好的平均分類正確率。
- (三)應用「子概念間具有上下位關係的貝氏網路架構」來診斷學生錯誤類型與子概念的有無情形，確實可行，且比過去研究結果能將錯誤類型與子概念做更精準的分類。
- (四)將來可建立一套以貝氏網路為理論根據之電腦診斷測驗系統，則能自動又省時的辨識學生錯誤概念和子概念有無，配合電腦化的補救教學元件，為學生提供立即的分析結果和適性化的補救教學，減輕教師的負擔。

## 六、參考文獻

- 莊惠萍、林立敏、郭伯臣(民94)。貝氏網路在數學領域「數與量」主題測驗上的應用——以國小五年級學童「立方公尺與體積」單元為例。彰師大科教研討會，彰化。
- 李俊儀(民94)。以貝氏網路為基礎的電腦化適性測驗選題策略-以國小數學科診斷測驗為例。國立台中師範學院數學教育研究所碩士論文，台中市。
- 許雅菱(民94)。貝氏網路在教育測驗分析上的應用。台中師範學院測驗統計研究所碩士論文，台中市。
- 呂玉琴(民90)。分數概念：文獻探討。國立臺北師範學院學報，第四期，753-606。
- 楊任孝(民87)。國中小學生分數概念的發展。國科會計畫研究報告。
- 教育部(民92)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，台北。
- 康軒文教事業(民94)。國民小學數學教學指引第十冊五下，台北。
- Huang, Y.(1999).Learning Bayesian networks guided by decomposable Markov networks. Unpublished MSc, The University of Regina(Canda).
- Lee,J (2003). Diagnosis of bugs in multi-column subtraction using Bayesian networks. Unpublished ph.D., Columbia University.
- Vomlel,J.(2003), Bayesian networks in educational testing. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System. 2004,1 83-100.
- Robert J. Mislevy, Russell G. Almond, and Janice F. Lukas, A Brief Introduction to Evidence-Centered Design(College Park: College of Education, University of Maryland, 2003). [www.education.umd.edu/EDMS/mislevy/papers](http://www.education.umd.edu/EDMS/mislevy/papers)
- Tatsuoka,K..K.(1984).Analysis of error in Fraction Addition and Substraction Problems.Final report MD:Illinois Univ.,Urbaan.Computer-Based Education Reserch Lab.